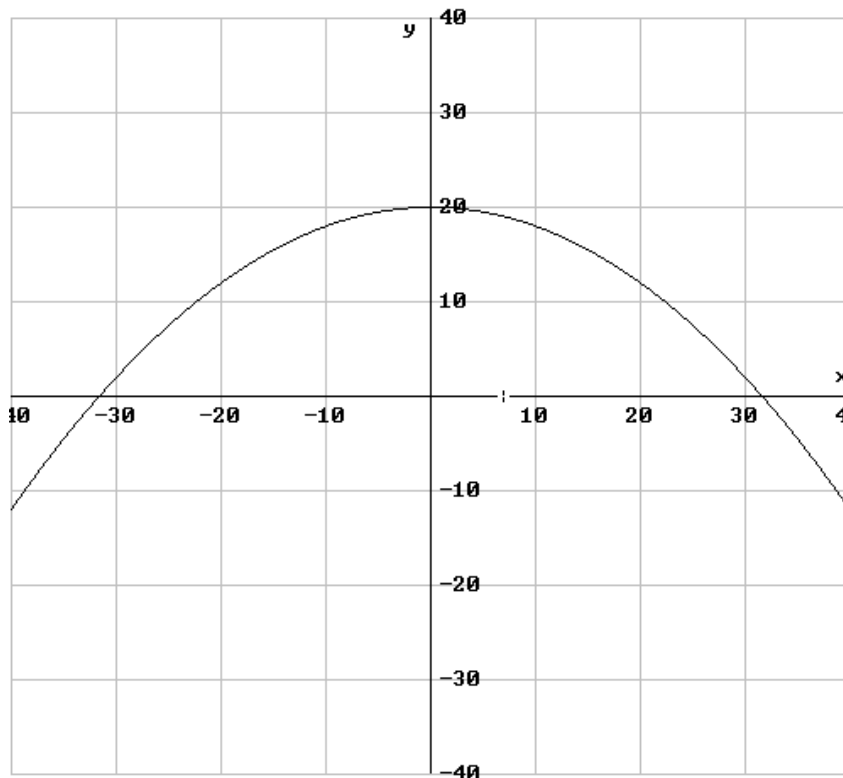


Steigung eines Graphen

Bergkuppe

a) Ausgangspunkt

Ausgangspunkt ist die Zeichnung eines Höhenverlaufes. Der Einfachheit halber nehmen wir einmal an, dass der Höhenverlauf durch die Funktion $h(x) = -\frac{1}{50}x^2 + 20$ beschrieben werden kann. Der zugehörige Graph sieht dann so aus:



Der „Gipfel“ des Berges befindet sich also bei $(0|20)$. Betrachtet man eine „Bergtour“ von links nach rechts, geht man zunächst den Berg hinauf und anschließend wieder hinunter.

Die Höhe an einer Stelle erhält man durch Einsetzen in die Funktionsgleichung. Für die Stelle -10 ergibt sich beispielsweise eine Höhe von

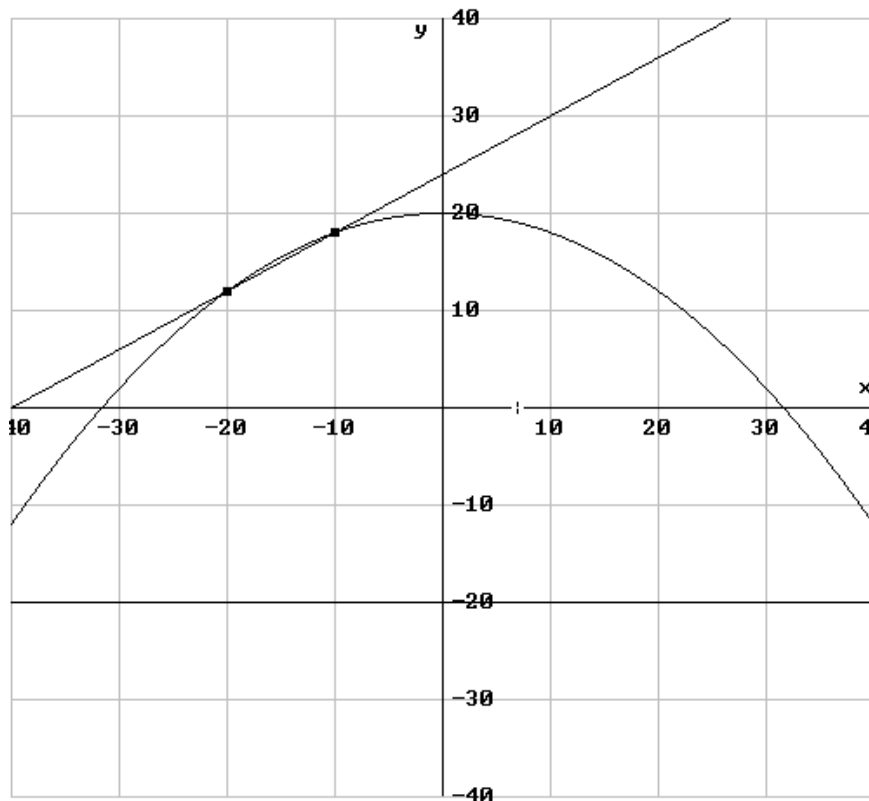
$$h(-10) = -\frac{1}{50}(-10)^2 + 20 = 18$$

b) Mittlere Änderungsrate

Von Interesse wäre bei diesem Berg die Fragestellung, wie steil ein bestimmtes Teilstück ist. Eine Steigung lässt sich – wie aus der Koordinatengeometrie bekannt – folgendermaßen

berechnen: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Interessieren wir uns also beispielsweise für die Steigung auf dem Teilstück $[-20; -10]$ benötigen wir die Koordinaten der im Bild unten eingezeichneten Punkte, um die Steigung berechnen zu können:



Da die Punkte auf dem Graphen liegen gilt für die y-Koordinaten:

$$y_2 = h(-10) = 18 \text{ und} \\ y_1 = h(-20) = 12$$

Als Steigung erhalten wir somit:

$$m = \frac{18 - 12}{-10 - (-20)} = \frac{6}{10} = 0,6$$

Diese Steigung entspricht der Steigung der links im Bild eingezeichneten Geraden durch die beiden Punkte.

Allgemeine Definition:

Den **Differenzenquotienten** $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ über einem Intervall $[a; b]$ bezeichnet man als **mittlere Änderungsrate der Funktion f über dem Intervall $[a; b]$.**

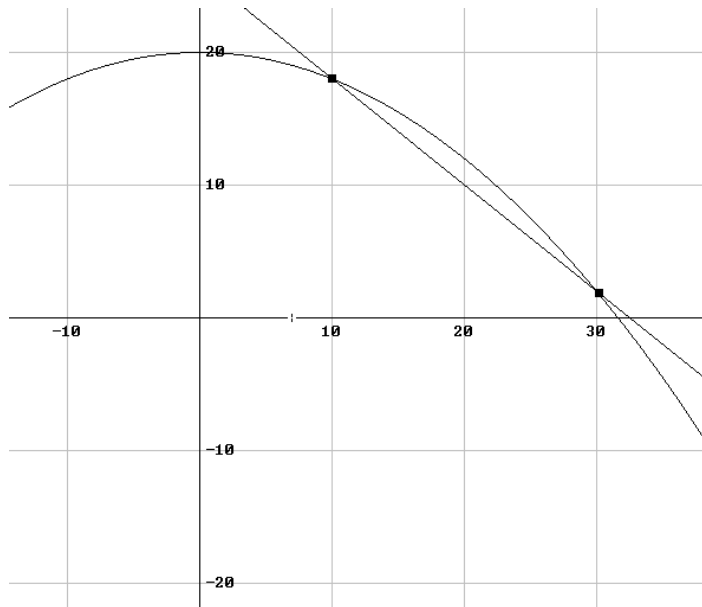
Grafisch betrachtet ist die mittlere Änderungsrate die Steigung der Geraden durch die Punkte $P_1(a|f(a))$ und $P_2(b|f(b))$. Diese Gerade bezeichnet man auch als **Sekante**.

c) Momentane Änderungsrate und Tangentensteigung

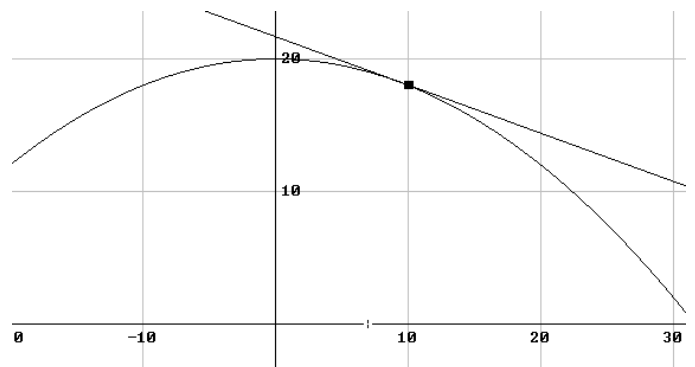
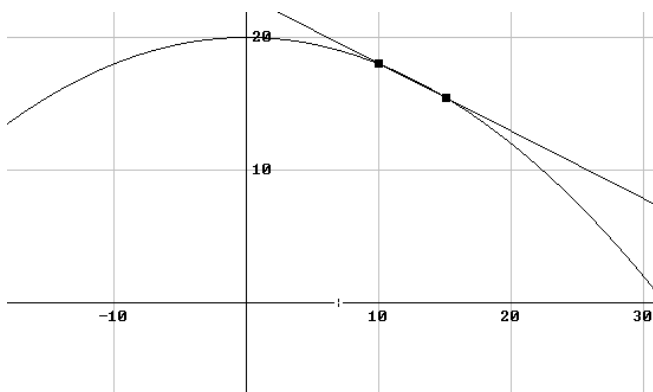
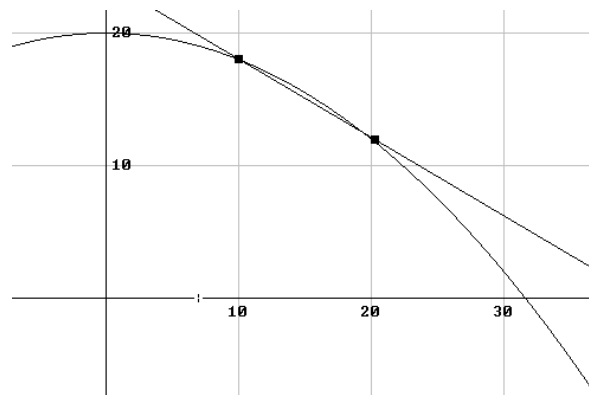
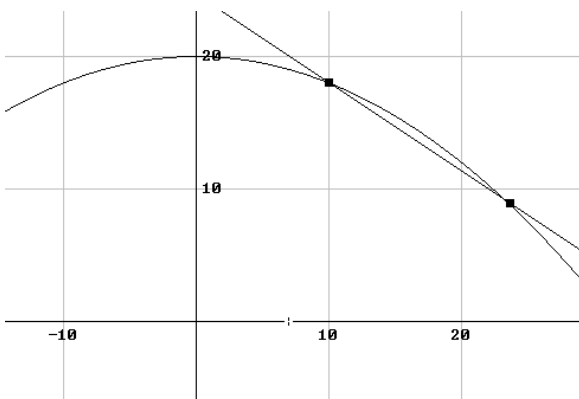
Ähnlich wie bei der Geschwindigkeit könnte man nun die Frage stellen: „Wie steil ist der Berg an der Stelle $x=10$?“

Auch hier verfolgt man den Gedanken ein betrachtetes Intervall möglichst klein werden zu lassen, um so der tatsächlichen Steigung an der Stelle 10 nahe zu kommen.

Graphisch betrachtet passiert also das folgende:



Zunächst wurde hier das Intervall $[10; 30]$ gewählt. In den folgenden Schritten lassen wir dieses Intervall immer kleiner werden, bis die Gerade scheinbar nur noch durch den Punkt $(10|18)$ verläuft.



Die Gerade in der letzten Zeichnung gibt uns die exakte Steigung des Berges an der Stelle 10 an. Man bezeichnet diese Gerade als **Tangente** an den Graphen von h .

Die gleiche Betrachtung könnte man von der linken Seite her wiederholen.

Was ist hier nun rechnerisch passiert?

Wie bereits festgestellt, können wir die Steigung einer Geraden durch zwei Punkte auf dem Graphen von f berechnen als:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

In unserem Bergbeispiel gilt: $f(x) = h(x) = -\frac{1}{50}x^2 + 20$.

Wie bei der Geschwindigkeit hatten wir ja die Überlegung ein immer kleiner werdendes Intervall zu betrachten, um die tatsächliche Steigung berechnen zu können. Wir betrachten also das Intervall $[10; 10+h]$, wobei h wie schon bei der Geschwindigkeit eine immer kleiner werdende Zahl ist. Im Rückgriff auf die Rechnungen der Geschwindigkeit ergibt sich also:

$$\begin{aligned} & \frac{f(10+h) - f(10)}{10+h-10} \\ &= \frac{\left[-\frac{1}{50}(10+h)^2 + 20\right] - \left[-\frac{1}{50} \cdot 10^2 + 20\right]}{h} \\ &= \frac{\left[-\frac{1}{50}(100 + 20h + h^2) + 20\right] - [-2 + 20]}{h} \\ &= \frac{-2 - \frac{20}{50}h - \frac{1}{50}h^2 + 20 + 2 - 20}{h} \\ &= \frac{-\frac{2}{5}h - \frac{1}{50}h^2}{h} \\ &= -\frac{2}{5} - \frac{1}{50}h \end{aligned}$$

Überlegt man sich nun wieder, dass h immer kleiner werden soll und bildet den Grenzwert für h gegen 0, gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{50}h\right) = -\frac{2}{5}$$

$-\frac{2}{5}$ ist also die momentane Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle 10. Man

schreibt dafür auch kurz: $f'(10) = -\frac{2}{5}$

Allgemeine Definition:

Den Grenzwert des Differenzenquotienten bezeichnet man auch als **Differenzialquotient**, **momentane Änderungsrate** oder **Ableitung**.

Unter der **Ableitung** $f'(a)$ einer Funktion f an der Stelle a versteht man also den Grenzwert des zugehörigen Differenzenquotienten für h gegen 0:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Falls die Ableitung $f'(a)$ existiert, nennt man die Funktion f **differenzierbar an der Stelle a** .

Als **Tangente** an den Funktionsgraphen von f im Punkt $P(a|f(a))$ bezeichnet man die Gerade durch den Punkt P mit der Steigung $m = f'(a)$

Grafisch betrachtet ist die momentane Änderungsrate (Ableitung) also die Steigung der Tangente im Punkt $P(a|f(a))$.